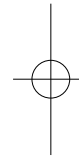
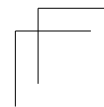
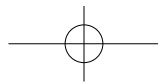


多様体とは何か  
 空間と次元から学ぶ現代科学の基礎概念  
 小笠英志 著



ブルーバックス



## はじめに

中学数学、高校数学を学ぶのに平面を知っていることが絶対に必要なのはご存じでしょう。ところで、ここで空間という言葉、我々の住んでいる「たて、よこ、高さで点の位置が決まる空間」の意味で使うことにします。中学数学、高校数学の多くは平面や空間の上で繰り広げられています。

一方、現代数学、現代物理の多くは、多様体という一種の図形を舞台に繰り広げられます。現代数学、現代物理を学ぼうと思えば、多様体の理解が絶対に必須です。

多様体は、現代数学、現代物理の入門書を読んでいると登場します。今まで、こんなことはありませんでしたか。入門書を読み進め、いざ多様体という言葉が登場し、みなさんが「何か大事そうな概念だな、すごいことを体験できそうだな」と感じたところ、もうその本の最後のほうであって、多様体についての説明はほとんどなかったということは。みなさんなら、もう一步踏み込んで、多様体について知りたいと思ったことでしょうか。

多様体がどのようなものか知りたいという人は、結構多くいます。非常によい興味の持ち方です。多様体を知りたいという欲を持った人は、現代数学や現代物理を理解する潜在的能力があると言えます。今、この本を開いているみなさんも、多様体とはどんなものか知りたいと思っていますよね。

多様体という図形には、1次元や2次元のものをはじめ、3次元や4次元、5次元と、すべての次元のものがあります。

みなさんなら、このような話を聞けば、ますます、いつもよりひとつ高いレベルの世界に入って、多様体というものを体感してみたいと思うことでしょう。

本書では、多様体の説明を、「多様体に触れるのは初めてという人」のレベルから始めます。今、本書を開いているみなさんなら、余裕で理解できますので、頑張ってください。

本文で順番に説明しますが、多様体というものは実は案外、「日常の暮らしの中で人間が無意識に自動的に考えているもの」と同等なものであったりします。また自然界を考える際に、当然のように現れるものです。多様体について学べば、日常を離れて高次元に挑むという興奮も味わえますが、前述の通り、そもそも多様体というのは、意外に日常生活で普段生じる感覚に根ざすものなのです。このあたりのことは、本文で、もう少し多様体に関する数学の言葉を導入しないと詳しくは説明できませんので、本文にお進みください。

多様体は図形の一種で、正確な定義があります。その定義を述べる前に、いくつか例を挙げることにします。その後、その例を踏まえて多様体の定義を説明します。

本書は「専門書を読み出す前の読者」や「将来、専門書は読まないかもしれないけど大体の感じをわかりたいという読者」のための入門書です。そのため、説明が直感的で、“気持ち重視”になっているところもあります。専門書に書いてある厳密な定義をいきなり述べると、初心者の場合、何を言われているのか、かえってわからないことがあるので、このような説明の仕方をするにしました。

では、本文に進んでください。さあ、「多様体」が幻視できるか挑んでください。

もくじ

はじめに\_\_3

PART **1**

我々の宇宙は「3次元空間」か？  
——「多様体」の導入

\_\_13

1. 我々の宇宙:3次元空間と3次元球面\_\_14
2. 多様体とはどのようなものか\_\_27
3. 4次元立方体と3次元球面 $S^3$ \_\_64
4. 4次元以上の多様体\_\_77

## PART 2

### 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ でも3次元球面 $S^3$ でもない 3次元多様体 —— 日常にひそむ多様体 \_\_ 87

5.  $S^1 \times S^2$  (エスワンクロスエスツー):  
 $\mathbb{R}^3$ でも $S^3$ でもない、 $\mathbb{R}^3$ にも $S^3$ にも入れられない \_\_ 88
6. 時計の短針、長針、秒針:  
我々が多様体を考え出すことは必然である \_\_ 98
7. 直積多様体 \_\_ 113
8.  $S^3$ と $\mathbb{R}^3$ は違う、 $S^3$ は $\mathbb{R}^3$ に入らない \_\_ 121
9.  $S^1 \times S^2$ の描き方、もうひとつ \_\_ 128
10.  $S^1 \times S^2$ を見る方法 さらにもうひとつ、  
および、 $T^3$ を見る方法もうひとつ \_\_ 134

## PART 3

### 多様体を高次元にすると……？

——その性質はどうなるか

—141

11. 境界付き多様体\_\_142
12. 3次元・境界付き多様体と  
2次元・境界付き多様体の違い:5次元!\_\_149
13. 地球上の風:我々が多様体を考えるのは  
ごく当然のことであるという別の例、  
ベクトル束、4次元多様体\_\_163

# PART 4

## 自然界を探究するのに 多様体が必要不可欠な理由 —— 物理における多様体

— 169

- 14. 平面回転、空間回転と多様体:  $SO(2)$ 、 $SO(3)$  \_\_\_ 170
- 15. 場の量子論の標準模型:  
 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  \_\_\_ 175
- 16. 超弦理論:  
カラビ・ヤウ 3-fold (6次元多様体の一種) \_\_\_ 177

## PART 5

### ポアンカレ予想は まだ解けていない!?

—181

17. 2次元ポアンカレ予想\_\_182
18. 3次元ポアンカレ予想\_\_189
19. 2個の多様体が同じか違うかの決め方\_\_195
20. ポアンカレ予想は、まだすべて解かれていない:  
解けば歴史に永遠に名が残ります\_\_211
21. 補足:ポアンカレはどうやって  
ポアンカレ予想にいたったか、など\_\_216
22. 枠付き絡み目による3次元多様体の表示\_\_221




# PART 6

## 複素数と複素多様体

\_\_\_229

- 23. 複素数と多様体 \_\_\_230
- 24. 枠付き絡み目による4次元多様体の表示 \_\_\_232

 ティータイム

オイラーの公式  $e^{i\cdot\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$  を  
高校数学で一応納得できる方法2つ \_\_\_235

# PART 7

## 結び目・絡み目と 高次元部分多様体

—241

- 25.** 我々のいる3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の  
結び目だけを研究していても  
高次元CW複体という多様体よりも  
複雑な図形が必要になる\_\_242
- 26.** 高次元絡み目同境\_\_246

本書関連動画の宣伝\_\_254

謝辞\_\_254

あとがき\_\_255

参考文献\_\_257

索引\_\_263