# オイラー線

小笠英志 Eiji Ogasa

任意の三角形$ABC$の外心を$Q$、重心を$G$、垂心を$H$とせよ。

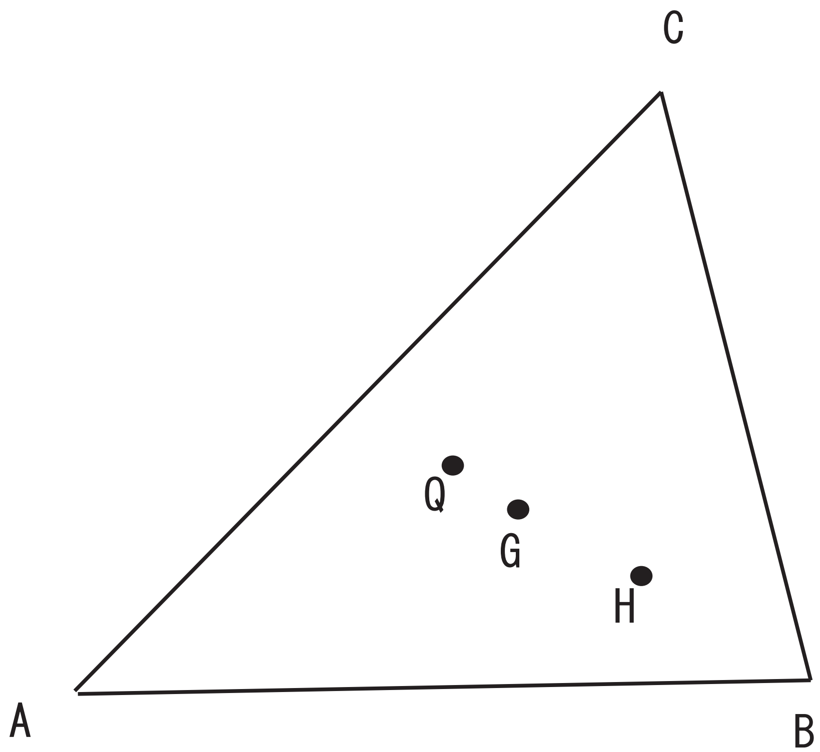


FIGURE 0.1.

　このとき、
点$G$は線分$QH$を1:2に内分する。即ち

$2\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{GH}$となる。

このことをベクトルと行列を使って簡単に短く証明する。

直線$QH$もしくは線分$QH$をオイラー線と言う。

本稿読者は高校数学で習うベクトルに関する知識は有するものとする。

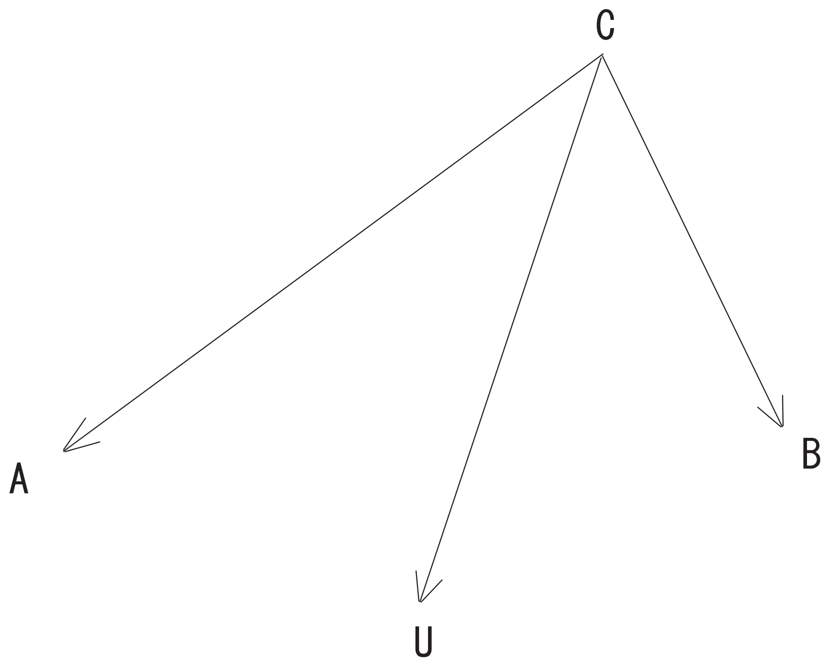


Figure 0.2.

図0.2で $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$とおく。このふたつは一次独立とする。
この平面上の任意の点$U$をとれ。$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CU}$とせよ。

$\overrightarrow{u} = x_u \overrightarrow{a} + y_u \overrightarrow{b}$

となる実数$x_u$、$y_u$が一意に決まる。

次のような内積を考えよ。

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}=x_u\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+y_u\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$$
$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{u}=x_u\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}+y_u\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}$$

$|\overrightarrow{a}|=a,\ |\overrightarrow{b}|=b,\ |\overrightarrow{u}|=u,\ \angle ACB=\theta$とする。と、

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}=x_ua^2+y_uab\cos\theta$$
$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{u}=x_uab\cos\theta+\mathrm{y_ub^2}$$

だ。

$$Z=\begin{pmatrix}a^2 & ab\cos\theta\\ ab\cos\theta & b^2\end{pmatrix}$$

とする

$$Z\begin{pmatrix}x_u\\ y_u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{u}\end{pmatrix} \tag{0.1}$$

行列未習の方へ。本稿で必要な知識は [1]の第II部補足128ページに乗っていることだけである。

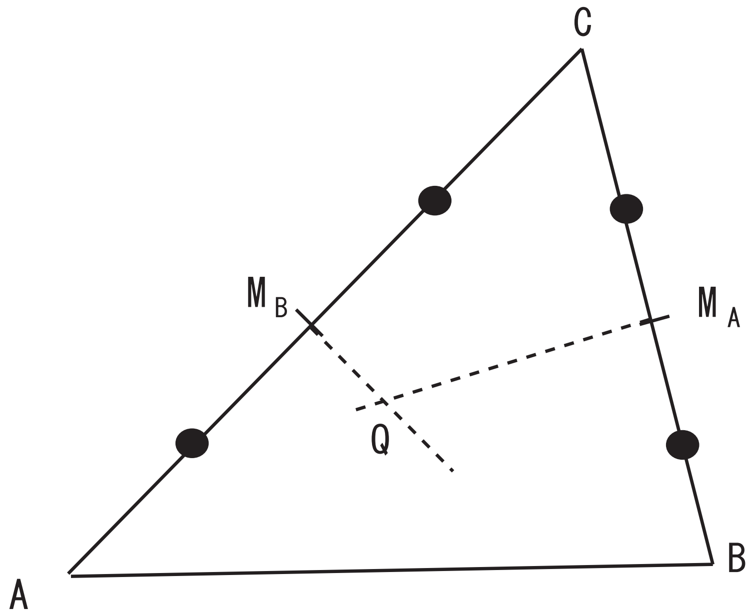


FIGURE 0.3.

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{q}$とおけ。
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{q}$のとき

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}a^2$$
$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{b} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}b^2$$

式(0.1)は、

$$Z\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix}$$だ。

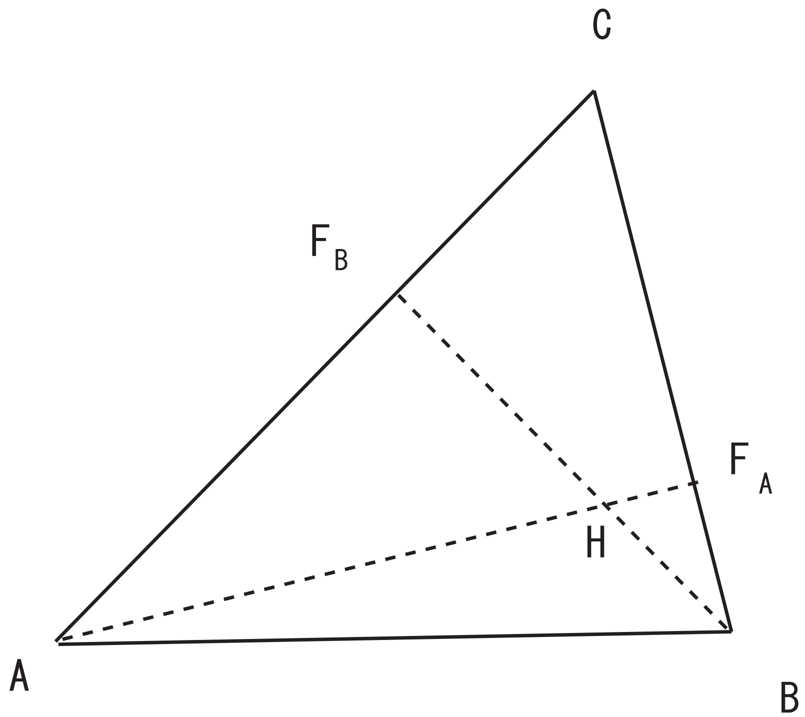


FIGURE 0.4.

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{h}$とおけ。
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{h}$のとき、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab\cos\theta$$
$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = ab\cos\theta$$

式(0.1)は、

$$Z \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab\cos\theta \\ ab\cos\theta \end{pmatrix}$$ だ。

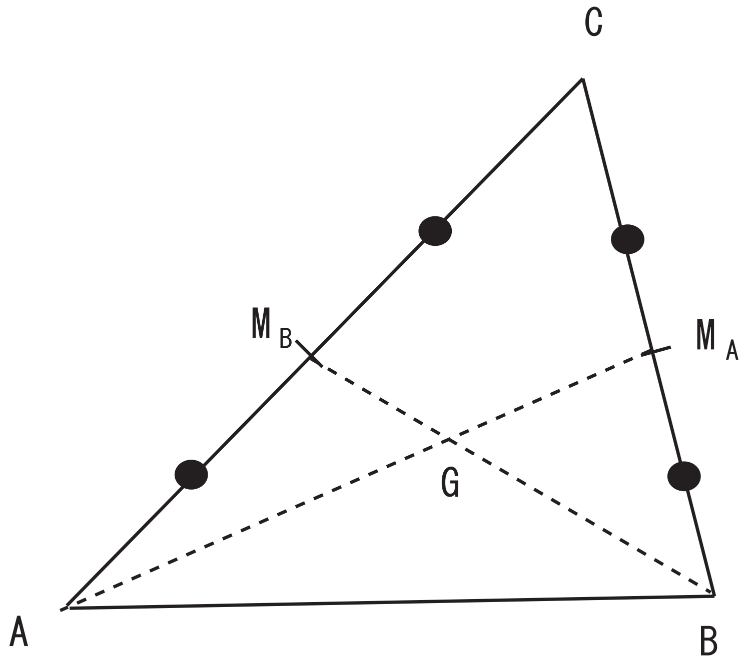


FIGURE 0.5.

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{g}$とおけ。
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{g}$のとき、

式(0.1)は、

$$Z\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} = Z\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab\cos\theta \\ ab\cos\theta & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2+ab\cos\theta}{3} \\ \frac{ab\cos\theta+\mathrm{b}^2}{3} \end{pmatrix}$$ だ。

$\overrightarrow{g}$、 $\overrightarrow{q}$、 $\overrightarrow{h}$、がどういう関係に有るかを知りたいのであった。ということは、

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix}$$

の関係を調べればよい。運良く、一目瞭然で次がわかる。

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2+ab\mathrm{cos}\theta}{3} \\ \frac{ab\mathrm{cos}\theta+\mathrm{b}^2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2\begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} \\ \frac{b^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab\mathrm{cos}\theta \\ ab\mathrm{cos}\theta \end{pmatrix}}{3}$$

$\mathrm{det}Z \neq 0$より、

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} = \frac{2\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix}}{3}$$

よって $2\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{GH}$

**References**

[1] 小笠英志：　相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう (2013) ベレ出版

関連動画
https://www.youtube.com/@eijiogasa2655
Eiji Ogasa で検索できます