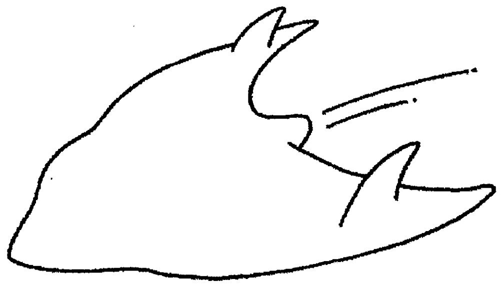
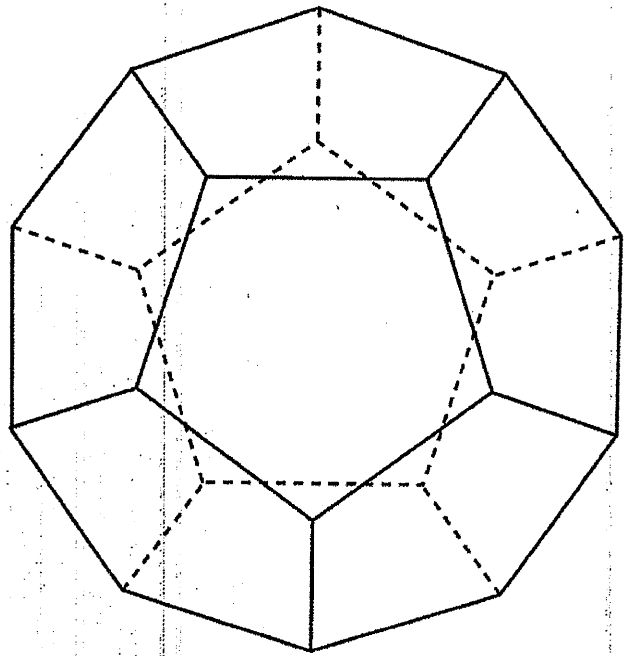


Digression

正十二面体（3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形の復習）

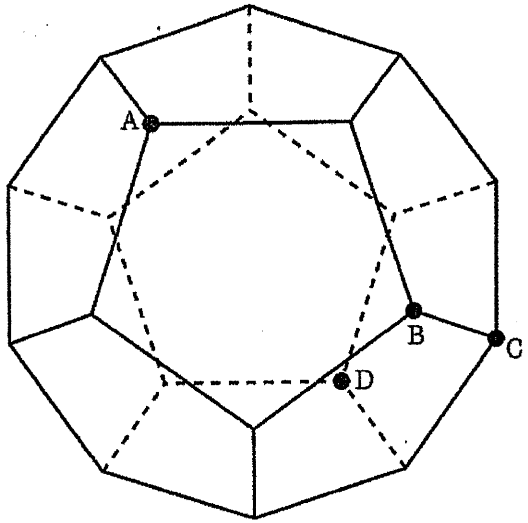
2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の中の図形の初等幾何、
3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中の図形の初等幾何、
は、本書で紹介しているような高次元の幾何をやる上で基礎として大事であることは言うまでもありません。
このDigressionでは、次の問題を議論します。

一辺の長さが1の正十二面体の対角線の長さをすべて求めましょう。

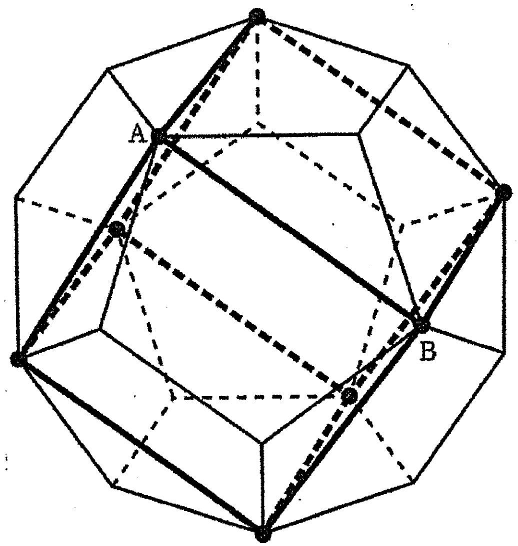


もしよろしければ、
最後のページに正五角形の図を置きましたので
12枚印刷してはさみとセロテープを使って
正十二面体を作ってみて下さい。

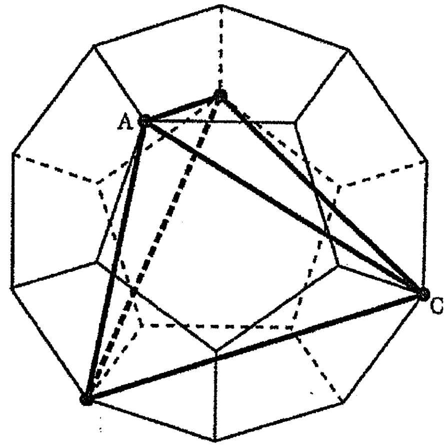
小笠英志「4次元以上の空間が見える」（ベレ出版）より



ABを一辺とする正六面体（立方体）がとれます。ADはその立方体の一番長い対角線です。



ACを一辺とするように正四面体がとれます。



立方体の一辺は正五角形の対角線の長さです。

正十二面体の対角線は、上記の
正五角形の対角線 a（立方体の一辺でもあります）
立方体の面の対角線 b
立方体の面上にない対角線 c
正四面体の一辺 d
です。

$b=\sqrt{2}\,a$
$c=\sqrt{3}\,a$

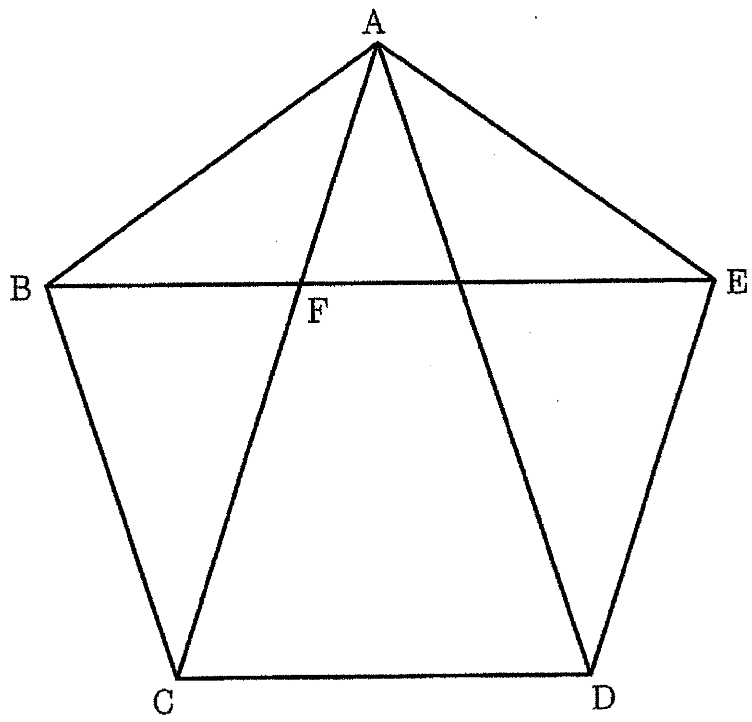
d は正四面体が立方体と同じ球に内接していることから出ます。

球の半径は $\dfrac{c}{2}$

d は半径の $\dfrac{2}{3}\times\sqrt{6}$ 倍

a の求め方は、今から説明します。

一辺1の正五角形の対角線の長さを求めてみましょう。
高校の復習です。



正五角形の各角は108度
角BCF＝角CAD＝36度
角CBF＝角CFB＝角ACD＝角ADC＝72度
です。

よって三角形ACDと三角形CFBは相似で、いずれも36度を頂角とする二等辺三角形です。

ACは、我々の今欲しいaですね。するとこの相似より

$BF=\frac{1}{a}$

三角形ABFを見ると角FBA＝角FAB＝36度
よってBF＝AF

よってAF $=\frac{1}{a}$

よって

ACはAF＋FC $=1+\frac{1}{a}$ とも表せる。

よって

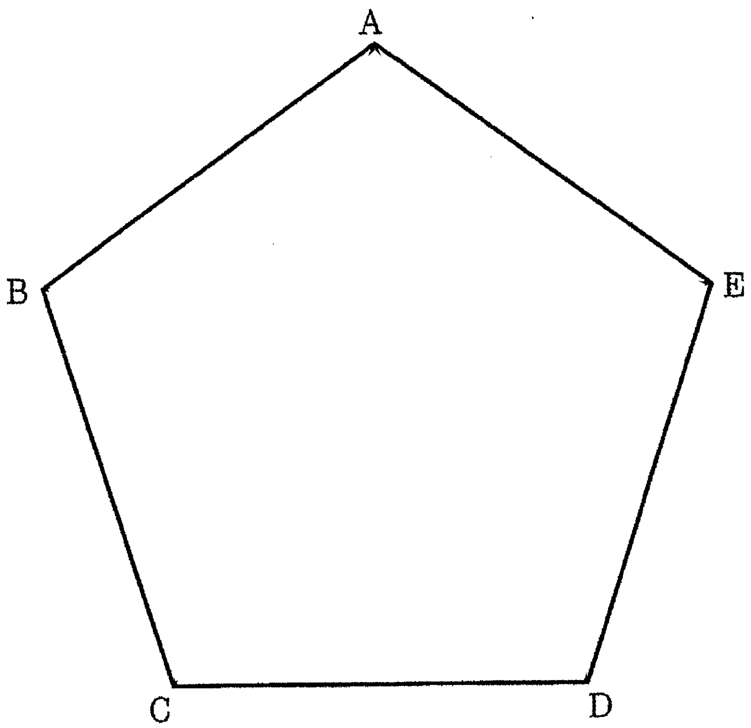
$a=1+\frac{1}{a}$ かつ $a>0$

よって

aは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(また、これを使うと18度や36度や72度のsinやcos、tanが求まりますね。これも高校の範囲です)

これよりb、c、dが求まります。


A
B
E
C
D