錐の体積を積分を使わないで小学生に納得させる方法と高次元への一般化

2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の中の図形の初等幾何、3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中の図形の初等幾何は、本書で紹介しているような高次元の幾何をやる上で基礎として大事であることは言うまでもありません。

このDigressionでは

Ⅰ.（錐の体積）$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）の係数 $\dfrac{1}{3}$ について、小学生でも納得できる説明（積分公式を使わない説明）

Ⅱ.その説明の n 次元への一般化を述べます。

1．序

（錐の体積）$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）の係数 $\dfrac{1}{3}$ については、小学校、中学校では「なぜ $\dfrac{1}{3}$ になるか？」は普通教えません。高校になって積分公式 $\int x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3+$（定数）を使って説明されます。

このDigressionでは積分公式 $\int x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3+$（定数）を使わないで、小学生（および中学生）に説明する方法の試案を提出します。ハイレベルな小学生ならわかる説明です。次の手順で説明します。

(1) 特別の錐の場合に微積分を使わず図形だけで説明します（このDigressionの4.参照）。

(2) 一般の錐の場合は“細かく切り刻む”方法を使います（このDigressionの5.参照）。切り刻む方法というのは、円の面積を求めるとき小学校で習うような方法のことです。この方法は積分による面積の定義のようなことではあるのですが、小学校で円の面積を求めるときに習っています。なのでこの方法は優秀な小学生は知っています。

我々の方法は“細かく切り刻む”方法は使いますが、積分公式は使いません。具体的な無限級数の公式も使いません。ぎりぎり小学生の知識範囲内で説明します。

注意： 円の面積を求める場合は、細かく切り刻んだ後、積分公式を使わずにうまい具合に面積が出せました（あとで少し触れます）。一般の錐の場合も積分公式を使わずにうまく体積が出せることを、以下に述べます。

2．三角形の面積の求め方の復習

（三角形の面積）$=\dfrac{1}{2}\times$（底辺）$\times$（高さ）の係数 $\dfrac{1}{2}$ については、周知の通り小学校以来図1のような図で説明されますよね。合同な二つの三角形を図のように二つ合わせると平行四辺形になるので、三角形の面積は平行四辺形の面積の2分の1です。

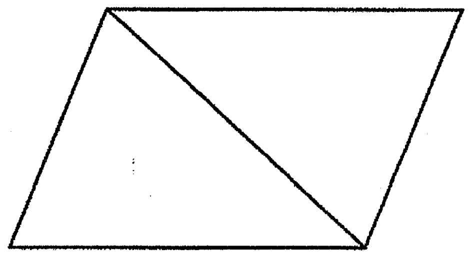

図1

3．円の面積の求め方の復習

小学生が円の面積を習うとき、図2のように切り刻んで、横の長さが「円周の半分の長さ」、縦の長さが「円の半径」というような、長方形に帰着して納得しますね。切り刻むところで、積分の考えは、使われるといえば使われていますが、このような切り刻み方は（算数の得意な）小学生ならわかることですし、なんといっても、積分公式は使っていません。

小笠英志「4次元以上の空間が見える」（ベレ出版）より

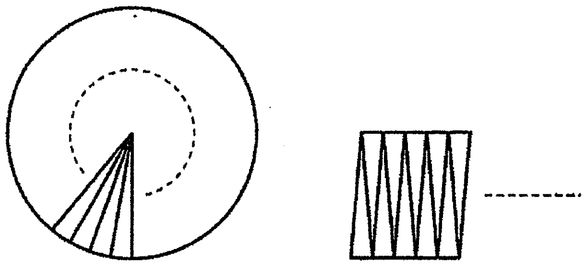

図2

4．特別の錐の場合

図3を見てください。このような合同な四角錐を三個合わせると立方体になりますね。図4、5、6、に各四角錐を描きました。よって、この錐の場合

（錐の体積）$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）×（高さ）となります。

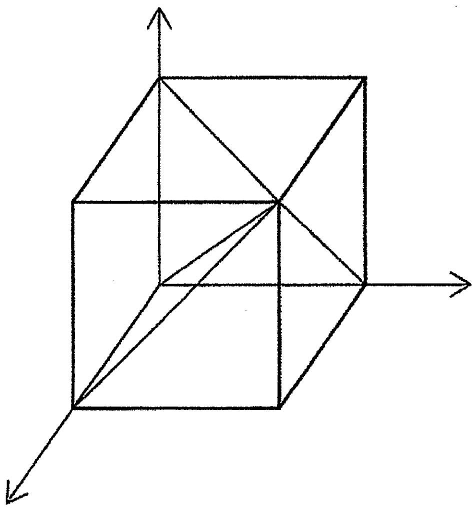

図3

図4の展開図を最後のページに置きました。
印刷して作ってみて下さい。3枚印刷して
3個作って図3のものも作って下さい。

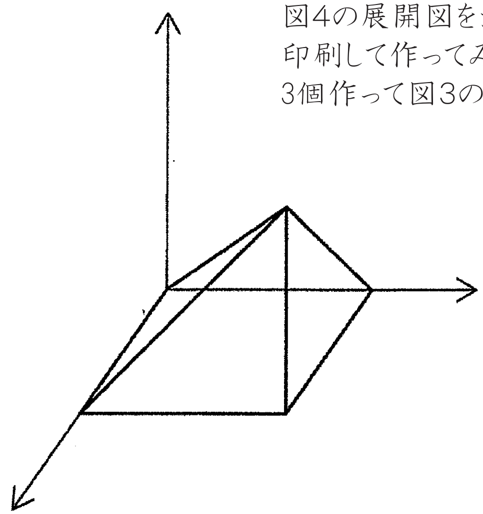

図4

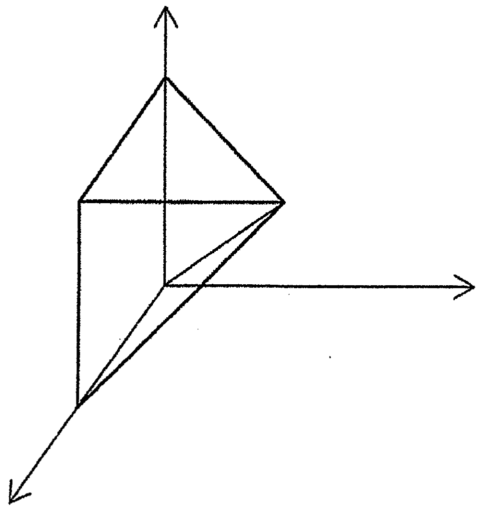

図5

小笠英志「4次元以上の空間が見える」（ベレ出版）より

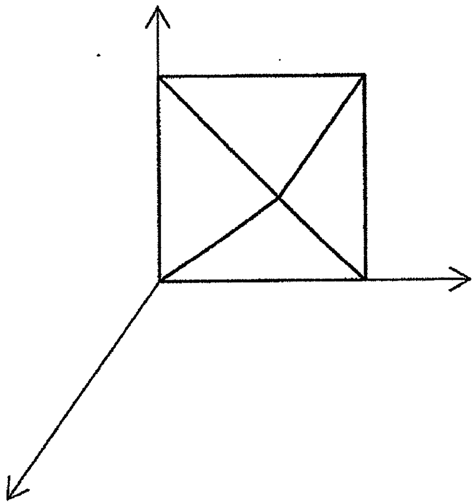

図 6

また、図 7 の場合、6 個の合同な四角錐を図のように合わせると立方体になります。よって、この錐の場合も

$$(\text{錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

です。

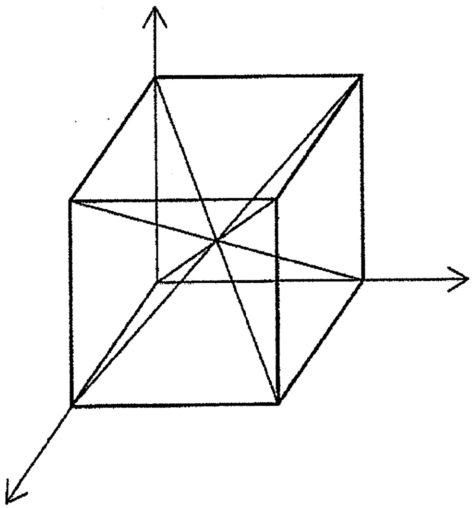

図 7

5．一般の錘の場合

柱の体積は（底面積）×（高さ）です。

底面はなんでもよいので錐をひとつとり、図 8 のように細かく切り刻みます。すると錘は高さの小さい柱の和で書けます。n 等分すると、n 個の柱の和になります。高さ、底面積がそれぞれ等しいふたつの錘をとります。このふたつの錘をそれぞれ、図 8 のように n 等分します。すると双方の上から i 番目の柱の体積は相等しくなります。なぜならば高さが相等しく、底面積も相等しいからです（i 番目の柱の底面積は、これらの錘の底面積の $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ です）。

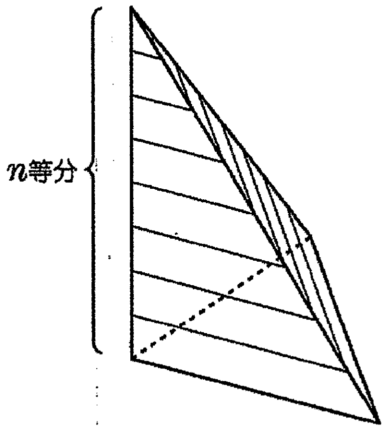

図 8

次に高さが等しい二つの錘を二つ用意します。図 8 のように n 等分します。すると双方の上から i 番目の柱の体積の比は双方の錘の底面積の比です。なぜならば高さが相等しく、この柱の底面積は、錘の底面積の $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ だからです。よって錘の底面積の比がこの i 番目の柱の体積の比です。

小笠英志「４次元以上の空間が見える」（ベレ出版）より

小学校で習う相似により、錘の体積は底面積に比例することがわかります。

一般に錘Pが与えられた場合、このDigressionの4．のような錘Qで、高さが同じものをとってくらべます。高さをhとします。するとQの体積は$\left(\frac{1}{3}\right)h^3$です。Pの底面積を$S$とするとすぐ上のことよりPの体積は$\left(\frac{1}{3}\right)h\cdot S$となります。よって一般の錘の場合も

（錘の面積）＝（底面積）×（高さ）×$\left(\frac{1}{3}\right)$

となります。

6．n次元

“n次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$” の中に次の図形を考えます。$\mathbb{R}^n$の座標を$x_1, \cdots x_n$で表すとします（nは0または自然数)。

$X=\{(x_1,\cdots x_n) \mid 0 \leqq x_i \leqq 1, i=1,\cdots,n\}$ と

$Y=\{(x_1,\cdots x_n) \mid 0 \leqq x_n \leqq 1, x_n \leqq x_i \leqq 1, i=1,\cdots,n-1,\}$

という図形を考えます。

Xはn次元方体とでもいうべき図形です。Yはn次元錘とでもいうべき図形です。$n=2$、$n=3$のとき、どうなるかを確認してみてください。

$n=3$の場合（すなわち3次元錘の場合）はこのDigressionの4.の場合になりますね。3次元の錘の体積の議論を一般化してn次元の場合も考えるとYの“n次元体積”はXの“n次元体積”の$\frac{1}{n}$である事が、IVと同様に図形的に説明できます。

X, Yの底辺の$(n-1)$次元方体の1辺の長さ1をaに替えたとします。すると、Xの“n次元体積”はa^n、Yの“n次元体積”は$\int_0^a x^{n-1}dx$と書けます（x_n軸に垂直な（$n-1$）次元面での切り口を考えてみてください)。Yの“n次元体積”はXの“n次元体積”の$\frac{1}{n}$であることを図形的に示せるということは、$\int x^{n-1}dx$が$\frac{1}{n}x^n+$(定数）であることも示してもいます。（すなわち積分公式の、微分や極限を使わない説明であるわけです。）興味のある初心者の方は考えてみてください。

n次元の図形や“n次元体積”については大学の解析の本のn変数の微積分のところや、大学の線形代数の本のn次元vector空間のところをご覧ください。“n次元体積”は皆さんもお聞きになったであろう超弦理論の話にも出てきます。たとえば、Polchinskiの“String theory”Cambridge University Pressの§8.7では積極的に使われています。Green Schwarz & Wittenの本“Superstring theory”Cambridge University Pressの§2.1.1でも消極的に使われています。

数学や物理でn次元空間というものを理解する際、図形的直感は大切と思います。このようにして錘の体積を説明すると、そういうところに小学生、中学生を招待できます。（$n=4$の場合だけでも）X, Yが見えれば小学生、中学生はいたく感動するでしょう。

小笠英志「4次元以上の空間が見える」（ベレ出版）より