Digression $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の納得の一方法

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

という等式の正当性についてのきちんとした説明は大学以上のレベルの数学の本を見れば書いてあります[1]。

しかし、厳密な説明とは別に、"気分的に納得したい" というのも人情であろう。ここでは、なぜ、$e^{i\theta}$ を考えると、cos や sin が出てくるのか、なぜこの式が成立するのか、気分的に納得できるかもしれない説明を述べます。

初心者の皆様が相対論について人に話すときの雑談のネタになるかもしれません。

a^b について、a が複素数 b が実数の場合どのような答えになるかは高校で習っています。

すなわち　$3^{0.5}$ $4^{\sqrt{2}}$ などは既知とします。

高校の教科書に書いてある通りこの　$3^{0.5}$ $4^{\sqrt{2}}$ などを考えている時点で既に

「a^b は "a　を　b　回かける" という解釈を拡張したもの」

になっていることに注意して下さい。

ここでは、まず a が正の実数、b が実数でない複素数の場合の a^b を論じます（もちろんこれは $e^{i\theta}$ の場合を含みます）。

「a が正の実数、b が実数の場合の a^b の定義」

を

「a が正の実数、b が実数でない複素数の場合に拡張できるか？」

というふうに考えましょう。

[1] たとえば、高木貞治「解析概論」（岩波書店）、アールフォルス「複素解析」（現代数学社）など参照。

小笠英志「相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう」（ベレ出版）より

a^b を複素数として定義できるか？　ここでは、まずは、できるものと信じて探してみましょう。まず、この考え方に類似した、次のことを復習します。

● $x^2 = i$ をまず考えましょう

「$x^2 = i$ を解け」という問題を復習しましょう。

御存知の通り「$x^2 = -1$ を解け」という問題のときは、虚数単位 i を導入し、"数概念を実数から複素数" へ拡張せねばなりませんでした（i は 2 乗して -1 になるもの 2 つのうち 1 つを自分で決める。高校数学程度）。「$x^2 = i$ を解け」の場合も、何か新しい数を導入する必要があるのでしょうか？

まずは　$x^2 = i$　が複素数の範囲に解を持つか考えてみましょう。

複素数の範囲に解があるなら、

$x = p + iq$（p, q は実数）

と置けます。そして、これを、

$x^2 = i$ に代入してみましょう。

$(p + iq)^3 = i$

$p^2 + 2pqi - q^2 = i$

$p^2 - q^2 + (2pq - 1)i = 0$

$p^2 - q^2$ と　$2pq - 1$　とは実数なので

$p^2 - q^2 = 0$　$2pq - 1 = 0$

$p^2 - q^2 = 0$ より、$p = q$ または　$p = -q$。

$p = q$ のとき、　$2pq - 1 = 0$ より、$2p^2 - 1 = 0$。よって $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$

または　$p = \frac{-1}{\sqrt{2}}$。

よって $(p, q) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$。または $(p, q) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$。

$p = -q$ のとき、　$2pq - 1 = 0$ より、　$2p^3 + 1 = 0$。p は実数なのでこの場合は解無し。

よって「$x^2 = i$ を解け」の解は $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ と $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ である。

というふうにして、解くのでした[2]。複素数の範囲で解は見つかるのでした。そして、その複素数を $x^2 = i$ の解として採用するのでありました。

● 話を $e^{i\theta}$ にもどす

さて、我々が今考えている問題「$e^{i\theta}$　はどのような数か？」に戻りましょう。

前項「● $x^2 = i\cdots$」のように $e^{i\theta}$ は複素数で表せるかどうかを考えてみましょう。もしも表されれば、それを答えとして採用することにします。

a^b は複素数として定義できるか？ ここでは、まずは、できるものと信じて探してみましょう。a^b は複素数　$p + iq$ となるとしてうまくいくか考えましょう（a は正の実数、b は複素数でした）。ここで、$p, q,$ は実数、i は虚数単位。

a^b は複素数となると考えたらなぜ cos　や　sin　が登場するのか、なるべく納得できるよう努めましょう。

さて、次のことを思い出しましょう。$f(z) = z^3 - z + 3$ のように $f(z)$ が実数係数多項式のとき、$z = x + iy$ を $z = x - iy$ に変えると $f = p + iq$ ならば $f = p - iq$ になるのでありました（x, y, p, q は実数）（高校教科書レベル）。

[2] 勿論　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を認めれば　$x^2 = i$　はもう少しすっきり解けます。$x = e^{i\theta}$ と置くと、$x^2 = (e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ です。$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ です。すると $e^{2i\theta} = e^{\frac{\pi}{2}i}$。よって $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$（$n$ は整数）。この θ を $x = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に代入すると、x として上と同じ答えが得られます。

小笠英志「相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう」（ベレ出版）より

ということより、次のようになると信じます。$a^{x+iy}=p+iq$ となったとします。このとき $a^{x-iy}=p-iq$ となるとします(x, y, p, q は実数)[3]。

b、c が実数の場合、$a^b a^c=a^{b+c}$ でありました。a^{x+iy} の場合も $a^{x+iy}=a^x a^{iy}$ と信じます。a^x は上記の通り既知でありますので、a^{iy} がどうなるか考えましょう。

単に見やすさの理由より記号を y から θ に替えて $a^{i\theta}$ を考えます。

$a^{i\theta}=f+ig$ とおけるとしましょう(θ, f, g は実数)。上の議論より $a^{-i\theta}=f-ig$。

$a^{i\theta}a^{-i\theta}$ を考えましょう。

$a^{i\theta}a^{-i\theta}=a^{i\theta-i\theta}$ を信じていますので $a^{i\theta}a^{-i\theta}=a^{i\theta-i\theta}=a^0=1$。($a^0=1$ は高校教科書レベル)。

また $a^{i\theta}a^{-i\theta}=(f+ig)(f-ig)=f^2+g^2$(ここで $(f+ig)(f-ig)=f^2+g^2$ は、括弧を外して複素数の計算をしただけ。高校教科書レベル)。よって $f^2+g^2=1$。

これも高校教科書レベルの知識から、$f^2+g^2=1$ なので、ある角度 α(角度の単位は rad。rad は高校数学で習います)を使って、

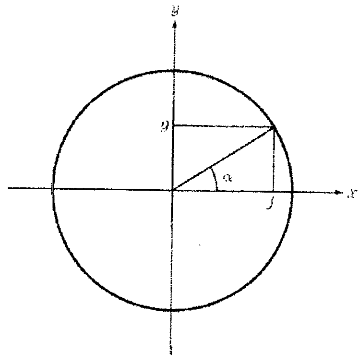
$f=\cos\alpha$,

$g=\sin\alpha$,

と置けます(右図参照。α は実数)。確かに cos と sin が登場しました。

[3] 実際、a^x (a、x は実数)などの解析関数はテイラー級数という“無限項からなる実数係数多項式”に展開されます。もちろん無限項なので扱いには注意が要りますが。ちなみに、ここ Digression の最初に述べた厳密な説明はテイラー級数を使います。

xy 平面の単位円 $x^2+y^2=1$



注意:点 (f, g) は仮に第一象限に書いたが、実際は第一象限にあるとは限らない

ここで、α は θ によって決まる、すなわち θ の関数であり、$\alpha(\theta)$ と置ける(と信じます)。

複素平面

別の言い方をしましょう。

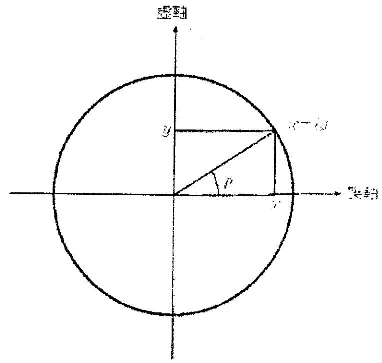
$z=x+iy$ (x, y は実数)

とすると必ず、実数 ρ を用いて

$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\rho+i\sin\rho)$

と書けます。

ρ は、z が右図の場合は、右図のもの。



小笠英志「相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう」(ベレ出版)より

この平面を複素平面と言います。詳細は複素解析の本を御覧下さい。

$a^{i\theta}$ が複素数になると仮定した時点で sin, cos は出てきて不思議のない状況だった、とも言えます。

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

さて、次に、$\alpha(\theta)$ がどのような関数になるか論じましょう（θ は実数でした。$\alpha(\theta)$ も実数）。

$a^{i\theta} = \cos(\alpha(\theta)) + i\sin(\alpha(\theta))$ ――＊

と置けるのでした。両辺を θ で微分しようとします。$\alpha(\theta)$ は微分可能な関数と信じます（高校程度の微分を使います）。

高校数学教科書にある通り a が正の実数、k が実数のときは、

$\frac{d}{d\theta}(a^{k\theta})$ は $ka^{k\theta}\log_e a$ でした。k が複素数の時もこの微分に意味があり同じ公式になると信じます。なので直前の式＊の左辺の微分は $ia^{i\theta}\log_e a$（a が正の実数なので $\log_e a$ には意味があります）。

高校数学教科書にある通り a, b が実数のときは、

$$\frac{d}{d\theta}(af(\theta) + bg(\theta)) \text{ は } a\frac{d}{d\theta}(f(\theta)) + b\frac{d}{d\theta}(g(\theta)) \text{ でした。}$$

a, b の片方もしくは両方が複素数の時もこの微分に意味があり同じ公式になると信じます。なので＊の右辺の微分は、微分を ′ で表すと、

$$\begin{aligned}
&\{\cos(\alpha(\theta)) + i\sin(\alpha(\theta))\}' \\
&= -\alpha'(\theta)\sin(\alpha(\theta)) + i\alpha'(\theta)\cos(\alpha(\theta)) \\
&= i\alpha'(\theta)(\cos(\alpha(\theta)) + i\sin(\alpha(\theta)))
\end{aligned}$$

よって、

$$a^{i\theta}\log_e a = \alpha'(\theta)(\cos(\alpha(\theta)) + i\sin(\alpha(\theta)))。$$

ところで、この式と＊より

$\alpha'(\theta) = \log_e a$ となります。よって、これも高校範囲の知識より

$\alpha(\theta) = \theta\log_e a + c$（$c$ は実数の定数）

となります。

よって、上記のように実数の“実数乗”を“複素数乗”へ拡張するのであれば $a^{i\theta} = \cos(\theta\log_e a + c) + i\sin(\theta\log_e a + c)$ です。

$\theta = 0$ とすると、$1 = \cos(c) + i\sin(c)$ です。よって、c は 2π の整数倍です。

よって、$a^{i\theta} = \cos(\theta\log_e a) + i\sin(\theta\log_e a)$。

$a = e$ とすると $e^{i\theta} = \cos(\theta\log_e e) + i\sin(\theta\log_e e) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

すなわち $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ です（e^x も $\sin x$ も $x = 0$ での微分が 1 であったことがこれらが関係あることの遠因です）。

ここで、$\theta = \pi$ と置くと $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i0 = -1$。

よって $e^{i\pi} = -1$

もちろん、この議論は大雑把なものです。

a^b で a が正の実数でない複素数、b が実数でない複素数の場合は、まず a を $r \cdot e^{i\theta}$（r は 0 以上の実数、θ は実数）と表します。そして a^b を $(r \cdot e^{i\theta})^b = r^b \cdot e^{i\theta b}$ と見ます。θ の取り方は一意でない（2π の整数倍を足してもよいから）ので、b が実数でない複素数の場合、a^b は一般には多価関数です（a が正の実数のときは、上記のように一価に定義できる）。きちんとした議論は最初にあげた本などを御覧下さい。

こういう気分的納得も証明を理解したり、新発見したりするために、時として大事なものであります。

というのも、一般に、新発見をするときや、ものごとを理解するときは、こうやって見当をつけて、後できちんとした証明をつける（もしくは理解する）ものであるからです。

小笠英志「相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう」（ベレ出版）より

別の方法

$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ の納得の仕方、今までの話と似ていますがこういうふうにもできます。

$\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$はeの“何乗”と考えられるか？ と問題を捉えるのです（αは、実数とする$\sin(\alpha)\neq 0$とする)。

すなわち$\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)=e^z$というような$z$が、求められるか、そういうことが考えられるか？ を考えるのです。

zが実数なら、e^zは、実数なのでzは実数には解は無い。なので、複素数には解が考えられるかを考えましょう。x, yは、実数として$z=x+iy$と置きましょう。すなわち$\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)=e^{x+iy}$。

さて、先ほどの議論のように$\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)=e^{x-iy}$となると信じます。するとこれら二式を辺々かけて、

$(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\alpha)-i\sin(\alpha))=e^{x+iy}e^{x-iy}$。

よって$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=e^{x+iy-x-iy}$。

よって$1=e^{2x}$。よって$2x=0$。よって$x=0$。

よって$\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)=e^{iy}$

yをαの関数と思って両辺微分したら、後は前項「● $e^{i\theta}=\cdots$」とほとんど同様にして$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$。

小笠英志「相対性理論の式を導いてみよう、そして、人に話そう」（ベレ出版）より